Semestre 1

Fondement des mathématiques

1) Logique.

Propositions. Notion de connecteur logique (négation, et, ou, implication). Prédicat. Quantificateurs logiques. Implication, condition nécessaire, condition suffisante, équivalence, contraposition, réciproque. Notion de contre-exemple.

2) Ensembles

Notions d'ensemble et opérations sur les ensembles. Sous-ensembles, ensemble des parties d'un ensemble. Produit cartésien d'ensembles. Familles indicées d'ensemble et opérations.

3) Fonctions.

Injections, surjections, bijections, fonctions réciproques. Image directe et réciproque d'un ensemble par une fonction. Graphe d'une fonction.

4) Relations.

Relations binaires. Relation d'équivalence (la notion de classe s'équivalence ne sera pas traitée en cours). Relation d'ordre. Majorant, minorant, plus grand élément, plus petit élément. Bornes supérieure et inférieure.

5) Ensemble de nombres.

Rappel sur les nombres entiers, démonstration par récurrence. Nombres rationnels. Nombres réels. Nombres complexes. Les notions de groupes, anneaux, corps ne seront pas traités en cours mais pourront faire l'objet d'exercices.

6) Polynômes. Polynômes irréductibles sur R. Décomposition d'un polynôme dans R[X] et C[X]. Enoncé du théorème fondamental de l'algèbre.

7) Exemple d'élaboration d'une théorie mathématique : des systèmes d'équations linéaires aux espaces vectoriels. Système homogène, système de Cramer. Résolution d'un système triangulaire. Résolution d'un système par la méthode du pivot de Gauss.

Techniques de calcul

1) Suites numériques.

Suite bornée, croissante, décroissante, monotone, majorée, minorée. Suites arithmétiques et géométriques. Suites linéaires récurrentes

2) Dérivés des fonctions usuelles (sin, cos, tg, Arc sin, Arc tg, exponentielle, logarithme) et des produits et composés de fonctions. Dérivées successives.

3) Développements limités et calcul de limites

Formule de Leibnitz. Formule de Taylor-Young et Taylor-Lagrange. Développements limités. Fonctions équivalentes. Notations $f=0(g)$ et $f=o(g)$. Développement limité à l'ordre n au voisinage de 0. Développements limités des fonctions usuelles en 0. Opérations sur les développements limités. Application des développements limités à l'étude locale et asymptotique des fonctions.

4) Techniques usuelles de calcul d'intégrales (changement de variables, intégration par parties, intégration des fractions rationnelles,…). Primitive d'une fonction continue. Primitives usuelles. Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples.

5) Introduction aux fonctions de deux variables. Fonctions de deux variables. Dérivées partielles d'ordre 1.

Informatique S1

Objectif: Initiation à l'algorithmique et au langage C.

Compétences visées: La maîtrise des structures de base des langages de programmation.

Contenu :

En liaison avec les enseignements de mathématiques, on abordera

- Structures de programmes de base (séquence, condition et itération)
- Traitements élémentaires (maximum, minimum, somme, dénombrement)
- Tris de base, notion de complexité
- Introduction à la récursivité
- Debogueur.

Semestre S2

Analyse réelle 1

1) Limite d'une suite numérique.

Notion de limite et de suite convergente. Propriétés usuelles des limites. Convergence des suites croissantes majorées, décroissantes minorées. Limites de suites de nombres réels. Suites adjacentes. Méthode générale d'étude des suites récurrentes.

2) Limites d'une fonction numérique.

Limite en un point d'une fonction définie sur un intervalle. Caractérisation à l'aide des suites. Propriétés usuelles des limites. Cas où la variable tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

3) Continuité d'une fonction numérique

Continuité en un point d'une fonction définie sur un intervalle. Caractérisation de la continuité à l'aide de suites. Opérations sur les fonctions continues. Continuité sur un intervalle. Théorème des valeurs intermédiaires. Fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone. Image par une fonction continue d'un intervalle fermé borné.

4) Fonctions dérivables.

Dérivabilité en un point. Interprétation géométrique de la tangente au graphe en un point. Opérations algébriques sur la dérivée des fonctions. Dérivation de fonctions composées. Comparaison des fonctions puissance, logarithme et exponentielle au voisinage de l'infini, des fonctions puissances et logarithme au voisinage de 0. Théorème de Rolle et des accroissements finis. Caractérisation des fonctions constantes et des fonctions monotones dérivables. Etude des variations d'une fonction.

Algèbre linéaire 1
1) Généralités sur les espaces vectoriels de dimension finie.
Espaces vectoriels sur R. Sous-espaces vectoriels. Exemples. Familles génératrices. Espaces vectoriel engendré par une famille. Dépendance et indépendance linéaire. Familles libres. Bases. Caractérisation des bases comme familles libres minimales ou génératrices maximales. Dimension d'un espace vectoriel. Rang d'un système de vecteurs. Sous-espaces supplémentaires. Somme et somme directe de sous-espaces vectoriels. Théorème de la base incomplète.
2) Applications linéaires
Définition d'une application linéaire. Image, noyau, rang d'une application linéaire.
Théorème des dimensions. Caractérisation des applications injectives, surjectives et bijectives. Composition des applications linéaires. Matrice d'une application linéaire. Rang d'une matrice et de sa transposée. Changement de base. Matrice de passage. Action d'un changement de bases sur une application linéaire. Matrices équivalentes et semblables.
3) Calcul matriciel et déterminants.
Matrice. Opérations sur les matrices. Transposée, matrice symétrique. Matrice inversible. Calcul du déterminant d'une matrice. Application des déterminants à la résolution des systèmes linéaires et au calcul du rang d'une matrice.

Probabilités 1
1) Notion d'espace de probabilité
Modélisation dans le cadre probabiliste : expérience aléatoire, évènement élémentaire, ensemble fondamental (univers), événement, évènements disjoints et partition.
Mesure de probabilité : définition d'une probabilité, cas d'équiprobabilité (cardinal d'un ensemble fini et notion de dénombrement)
2) Probabilités conditionnelles et événements indépendants
Probabilité conditionnelle, Formule de Bayes et Formule des probabilités totales. Evènements indépendants (deux-à-deux et mutuellement).
3) Variables aléatoires
Définition d'une variable aléatoire. Fonction de répartition. Médiane et quantiles théoriques. Variable aléatoire définie à partir d'une autre variable aléatoire.
4) Variables aléatoires discrètes
Définition d'une variable aléatoire discrète. Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète. Conséquences sur le calcul de la probabilité d'un événement. Espérance, variance et écart-type théorique d'une variable aléatoire discrète. Propriétés de l'espérance et de la variance. Espérance d'une fonction de la variable. Loi uniforme, de Bernoulli, binomiale, géométrique et Hypergéométrique.
5) Introduction aux variables aléatoires à densité
Définition d'une variable aléatoire réelle. Densité de probabilité. Fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. Médiane et quantiles théoriques. Espérance, variance et écart-type théorique d'une variable aléatoire à densité. Propriétés de l'espérance et de la variance. Espérance d'une fonction d'une variable. Loi uniforme, exponentielle. Loi Gamma. Loi normale centrée réduite et loi normale et loi uniforme.
6) Loi d'une var définie à partir d'une autre var de loi connue

Informatique S2
Objectif : Ce cours est un approfondissement du cours d'algorithmique du semestre S1 et une introduction aux Systèmes d'exploitation.
Compétences visées : Connaissance des fonctionnalités de base des Systèmes d'exploitation et maîtrise de l'utilisation de structures de données complexes en algorithmique.
Contenu :
Introduction au système : fonctionnalités d'un système, services internet de base, LINUX.
Algorithmique et C:
- Structures et tableaux de structures, allocation dynamique, structures chainées.
- Fichiers textes,
- Algorithmes classiques (parmi les tris évolués ou la recherche de sous-chaînes de caractères)

Bibliographie : Idem S1 +
Types de données et algorithmes, Christine Froidevaux, M. C. Gaudel, M. Soria, Mc Graw Hill.
Unix, Linux et les systèmes d'exploitation, Michel Divay, DUNOD.
L'essentiel des structures de données en C, E. Horowitz, S. Sahni, S. Anderson-Fred, DUNOD.

Semestre 3
Analyse réelle 2
1) Compléments sur les suites numériques.
Sous-suites et valeur d'adhérence. Limite supérieure, limite inférieure.
Suites de Cauchy. Caractérisation de la convergence par la propriété de Cauchy.
2) Séries numériques.
Généralités sur les séries numériques réelles et complexes.
Séries à termes positifs. Critères de convergence. Comparaison avec une intégrale.
Séries à termes quelconques. Convergence absolue. Semi-convergence. Séries alternées, avec encadrement du reste. Théorème d'Abel-Dirichlet.
3) Intégration

Fonction en escalier. Intégrale d'une fonction en escalier et propriétés. Fonctions intégrables au sens de Riemann. Intégrabilité des fonctions monotones et des fonctions continues. Propriétés usuelles de l'intégrale.
Intégrales simples généralisées. Définition de la convergence d'une intégrale généralisée sur un intervalle ouvert ou non borné. Critères de convergence pour des intégrales de fonctions positives. Intégrales généralisées de fonctions de signe quelconque. Convergence absolue et semi-convergence.
4) Suites et séries de fonctions d'une variable réelle.
Convergence simple. Convergence uniforme : dérivée, intégrale, intervertion des limites. Convergence normale. Théorème de convergence monotone et Théorème de convergence dominée.
5) Séries entières
Définition. Rayon de convergence, lemme d'Abel. Exponentielle complexe. Dérivation et intégration des séries entières. Développement en série entière
6) Equations différentielles linéaires
Définition d'un problème de Cauchy. Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants. Résolution d'une équation différentielle linéaire $a(x)\ y' + b(x)\ y = c(x)$. Théorème d'existence et d'unicité du problème de Cauchy. Méthode de variation des constantes. Exemples d'équations différentielles se ramenant à une équation différentielle linéaire. Application des séres entières à la résolution d'équations différentielles.

Algèbre linéaire 2
1) Réduction des endomorphismes.
Valeur propre. Vecteur propre. Polynôme caractéristique. Sous-espaces propres. Diagonalisation des endomorphismes. Application au calcul de puissances d'une matrice. Notions sur la trigonalisation d'une matrice. Application aux systèmes récurrents et aux systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.
2) Espaces euclidiens
Produit scalaire dans un espace euclidien. Représentation matricielle. Orthogonalité.
Théorème d'existence d'une base orthogonale. Orthonormalisation de Schmidt. Projection orthogonale. Interprétation géométrique. Endomorphisme adjoint et isométrie. Matrices orthogonales. Réduction des matrices symétriques.
3) Formes bilinéaires symétriques
Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques. Représentation matricielle.
Dégénérescence, orthogonalité. Réduction de Gauss. Classification des formes quadratiques.

Statistiques 1
1) Statistique descriptive :
Modélisation dans le cadre de la statistique descriptive. Variable statistique quantitative (discrète et continue) et qualitative. Modalités, classes, effectifs, fréquences, fréquences cumulées. Diagrammes circulaires, diagrammes à bâtons, diagrammes en rectangles et histogrammes et fonction de répartition empirique. Indicateurs de tendance centrale et de dispersion pour une variable quantitative : mode ou classe modale, moyenne, médiane, amplitude, écart-type. Quantiles empiriques, coefficient de d'asymétrie et d'aplatissement.
2) Notions d'échantillon et d'estimateur
Suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Loi dépendante d'un paramètre inconnu (exemples). Principe de l'estimation paramétrique. Définition d'un estimateur. Exemple d'estimateurs : estimateurs empiriques de la moyenne et de la variance.
3) Propriétés des estimateurs
Biais et risque quadratique. Convergence en probabilité via l'inégalité de Markov et via la loi des grands nombres.
4) Estimation par intervalle de confiance
Théorème de la limite centrale. Lemme de Slutsky. Extension (Slutsky) du théorème de la limite centrale. Principe d'estimation par intervalle de confiance.
5) Principe de tests paramétriques
Loi du Khi-Deux et de Student. Principes généraux d'un test. Erreur de première et de seconde espèce. Puissance d'un test. Test sur le paramètre d'une loi de Bernoulli. Tests sur des échantillons gaussiens.

Informatique S3
Objectif : Consolider les connaissances de base en algorithmique et initier les étudiants au développement d'applications structurées
Compétences visées : maîtrise de la conception d'applications structurées et de l'utilisation d'environnements de développement de telles applications.
Contenu :
- construction de grosses applications bien structurées, traitement d'images, utilisation de bibliothèques mathématiques, statistiques, ..., makefile,
- introduction à la programmation système (infos système, processus,...).

Semestre 4

Analyse dans Rn
1) Topologie dans Rn.
Normes usuelles dans Rn. Boules, notions de voisinage, d'ouvert et de fermé.
2) Suites convergentes. Séries de vecteurs.
3) Compacité, caractérisation séquentielle de la compacité.
4) Limite et continuité des fonctions continues de plusieurs variables. Exemples : applications linéaires, bilinéaires. Opérations sur les fonctions continues. Existence d'un maximum et d'un minimum sur les compacts.
5) Différentiation des fonctions de plusieurs variables réelles.
Dérivées partielles. Gradient. Notion de différentielle d'une fonction de plusieurs variables. Matrice jacobienne. Notion de différentielle d'ordre 2 pour les fonctions à valeurs réelles. Matrice Hessienne. Développement de Taylor à

l'ordre 2. Application aux conditions d'optimalité.
6) Intégrales multiples.
Calcul d'intégrales multiples. Utilisation du théorème de Fubini et du théorème du changement de variables.

Méthodes numériques
1) Introduction aux méthodes numériques.
Représentation relative et absolue des réels, erreur relative, erreur absolue, règles de calculs sur les erreurs.
2) Algèbre linéaire.
Résolution de système linéaire : méthode de Gauss , LU,. Inversion d'une matrice.
3) Analyse numérique
Utilisation de logiciels pour évaluer les limites de suites et les sommes de séries. Majoration du reste. Approximation des intégrales (méthode des rectangles et des trapèzes) et évaluation de l'erreur. Résolution d'équations f(x)=0 par la méthode de Newton-Raphson. Approximation de solution d'équations différentielles d'ordre 1 par la méthode d'Euler.
4) Statistique descriptive bidimensionnelle :
Nuage de point. Point moyen du nuage. Covariance et corrélation empirique de deux variables quantitatives. Méthode des moindres carrés. Équation de la droite de régression linéaire. Estimateurs par moindres carrés ordinaires.
5) Simulations :
Simulation d'une réalisation d'un échantillon de variables aléatoires uniformes sur [0,1]. Simulation de la réalisation d'une variable aléatoire quelconque. Cas des variables gaussiennes. Visualisation de la loi des grands nombres et théorème de la limite centrale. Intervalles de confiance. Exemples de tests paramétriques. Expérience de Monte-Carlo. Exemple d'utilisation pour l'approximation d'une intégrale.

Informatique S4
Objectif : Dans ce module d'enseignement, les étudiants devront mener un projet informatique depuis sa phase de conception jusqu'à sa réalisation.
Compétences visées : Expérience du développement d'un projet informatique en groupe de 2 à 3 étudiants
Contenu : Plusieurs thèmes seront proposés chaque année. Chacun d'eux permettra à l'étudiant de s'initier à de nouvelles technologies informatiques. Par exemple :
Développement de sites Web :
- intoduction à HTML,
- programmation de pages dynamiques avec PHP
- utilisation d'interfaces Bases de données (MySQL)
Bases de données relationnelles :
- introduction aux bases de données relationnelles,
- langage de requête (algèbre relationnelle, SQL)
- Utilisation de MySQL.

Semestre S5
La troisième année ayant lieu en mobilité, on indique à titre indicatif le contenu des cours de mathématiques délivrés à Paris 1, afin d'aider à la réflexion concernant le choix des cours dans l'établissement d'accueil.

Probabilités et Intégration (S5)
1) Tribus
Rappels sur la notion d'ensemble dénombrable. Définition et propriétés des tribus. Tribu engendrée par une partition finie. Tribu borélienne (engendrée par les intervalles ouverts). Exemples d'ensembles boréliens.) Espace mesurable (probabilisable). Exemple des pavés de Rd.
2) Mesure et mesure de probabilité
Définition et propriétés d'une mesure. Mesure dominée. Espace mesuré (probabilisé). Exemples de mesure de probabilité sur un ensemble fini et dénombrable (masse de Dirac et mesure de comptage). Définition de la mesure de Lebesgue sur R et sur Rd. Exemples de mesures de probabilité définies à partir de la mesure de Lebesgue par une densité. Ensembles négligeables, propriété vraie presque partout (presque sûrement).
3) Fonctions mesurables et variables aléatoires
Ensemble image et ensemble réciproque par une application. Fonction mesurable pour deux espaces mesurables. Cas des variables aléatoires. Exemples : fonction indicatrice, fonction étagée, fonction borélienne, variables aléatoires discrètes et réelles. Approximation des fonctions mesurables par des fonctions étagées. Mesure image par une fonction mesurable, loi de probabilité et fonction de répartition d'une variable aléatoire, loi de probabilité discrète et diffuse (cas à densité).
4) Intégration de Lebesgue
Définition de l'intégrale de Lebesgue d'une fonction étagée, puis d'une fonction mesurable positive. Propriétés. Théorème de convergence monotone (Beppo-Lévi). Application aux séries de fonctions mesurables positives. Lemme de Fatou. Intégrale de Lebesgue d'une fonction réelle et propriétés. Liens avec l'intégrale de Riemann. Cas de la masse de Dirac et de l'espérance d'une variable aléatoire discrète. Théorème de convergence dominée de Lebesgue. Exemples d'utilisation, intégrale dépendant d'un paramètre, continuité et dérivabilité sous le signe somme. Théorème du transport. Utilisation de la densité d'une variable aléatoire réelle. 5) Espace produit. Vecteurs aléatoires
Définition de la tribu produit et de la mesure produit.
Cas discret: exemples de couples de variables discrètes. Introduction aux chaînes de Markov à espace d'états fini.
Mesure de Lebesgue sur R2. Théorème de Fubini. Loi jointe de vecteurs aléatoires, lois marginales et lois conditionnelles. Variables aléatoires indépendantes. Covariance et corrélation de variables aléatoires. 6) Espace L2
Définition. Produit scalaire dans L2. Inégalité de Schwarz. Espace de Hilbert.
7) Autres caractérisations de la loi de probabilité

Définition de la fonction caractéristique et de la fonction génératrice. Lien entre les deux notions. Caractérisation d'une loi par la fonction caractéristique (Théorème de Lévy). Théorème d'inversion. Dérivées de la fonction caractéristique et lien avec les moments. Fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire. Caractérisation de l'indépendance à partir de la fonction caractéristique.
8) Vecteur gaussien
Définition, caractérisation de l'indépendance des composantes, décorrélation et indépendance. Théorème de Cochran.

Analyse S5
1) Normes, espaces vectoriels normés. Exemples. Suites dans un evn. Ouverts, fermés, intérieur, adhérence.
2) E.v.n. produit, topologie sur une partie d'un evn
3) Suites de Cauchy, espaces de Banach, théorème du point fixe de Banach-Picard
4) Valeurs d'adhérence, espace compact (par Bolzano). Equivalence des normes en dimension finie.
5) Continuité des fonctions entre evn.
6) Continuité des applications linéaires. Norme d'opérateur. Cas des matrices.
7) Séries dans les espaces de Banach. Cas de l'exponentielle, inverse de Id+f.
8) Exemples d'espaces de dimension infinie usuels.
9) Calcul différentiel en dimension finie : dérivée directionnelle, dérivée partielle, différentielle. Inégalités de moyenne.
10) Théorème d'inversion locale et théorème des fonctions implicites.

Semestre S6

Statistiques 2
1) Convergence de suites de variables aléatoires.
Inégalité de Markov et inégalité de Bienaymé-Tchebytchev. Convergence dans Lp, presque-sûre, en probabilité. Convergence en loi. Propriétés et liens entre les divers modes de convergence. Lemme de Borel-Cantelli.
2) Théorèmes limite
Espérance et variance d'une somme de variables aléatoires. Cas des variables indépendantes et identiquement distribuées. Moyenne empirique et variance empirique. Loi faible et forte des Grands Nombres. Théorème de la limite centrale et utilisation du lemme de Slutsky. Delta-méthode.
3) Estimation paramétrique et modèle statistique
Principe d'estimation paramétrique. Définition d'un modèle statistique (espace des observations et famille de probabilités). Modèle exponentiel et modèle régulier.
4) Estimateur du maximum de vraisemblance.
Définition précise d'un estimateur. Vraisemblance d'un modèle statistique. Méthode de l'estimation par maximum de vraisemblance.
5) Qualité d'un estimateur paramétrique.
Estimateur sans biais et asymptotiquement sans biais, estimateur consistant, estimateur de variance minimum, estimateur efficace et borne de Cramer-Rao.
Application aux modèles exponentiels. Comportement asymptotique de l'estimateur du maximum de vraisemblance.
6) Exemples d'estimateurs semi-paramétriques et non-paramétriques
Estimation de la moyenne, de la variance. Quantiles empiriques. Estimateur par moindres carrés, application à la régression linéaire simple et multiple dans le cas du modèle linéaire gaussien. Comportement des estimateurs.
Estimateur de la densité d'une variable aléatoire: histogramme. Estimation de la fonction de répartition par la fonction de répartition empirique.
7) Tests paramétriques et non paramétriques
Définition précise d'un test. Erreur de première et seconde espèce. Puissance d'un test. Construction concrète d'un test. Test unilatéral et bilatéral. P-value d'un test. Test du rapport de vraisemblance. Comportement asymptotique de la statistique de test pour des modèles exponentiels réguliers. Applications aux tests de la moyenne et de la variance et aux paramètres des lois classiques. Test de Fisher pour les modèles linéaires gaussiens. Introduction aux tests non paramétriques: test d'adéquation du Chi-deux et de Kolmogorov-Smirnov.

Optimisation
1) Optimisation sans contrainte.
Position du problème. Extrema, extrema locaux. Conditions nécessaires du premier et du second ordre. Conditions suffisantes du second ordre pour les extrema locaux.
2) Fonctions convexes.
Définition d'une fonction convexe, concave de Rn. Caractérisation du premier et du second ordre de la convexité.
3) Ensembles et cônes convexes.
Rappel sur la géométrie euclidienne. Définitions d'un ensemble et d'un cône convexe. Cône finiment généré et lemme de Farkas. Cône normal, cône tangent, polarité.
4) Optimisation avec contraintes
Optimisation avec contraintes linéaires d'égalité et d'inégalité. Multiplicateurs. Conditions de Karush-Kuhn-Tucker. Lagrangien. Conditions nécessaires et conditions suffisantes.
5) Méthodes de programmation
Programmation quadratique, programmation convexe, introduction à l'algorithme du simplexe.

Analyse Hilbertienne
Rappels sur les espaces vectoriels normés. Espaces de Hilbert. Projecteur sur un convexe, projecteur linéaire. Base

topologique dans un espace vectoriel normé, base orthonormée dans un espace de Hilbert. Inégalité de Bessel et égalité de Parceval. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Espace dual, théorème de représentation dans les espaces de Hilbert et opérateur transposé.